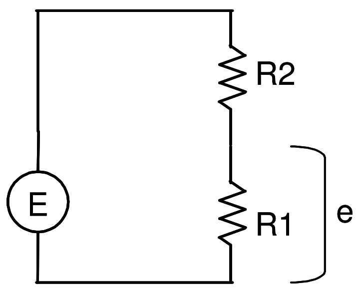
EXEMPLES

D'UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES EN ÉLECTRONIQUE

Jacques Audet
Septembre 2024

Calcul d'un diviseur de tension:



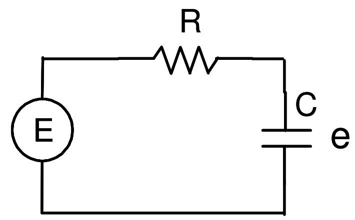
$$e = E \cdot \frac{R1}{R1 + R2}$$

Donc le rapport des tensions (K) entre la sortie et l'entrée:

$$\frac{e}{E} = \frac{R1}{R1 + R2} = K$$

Cette relation s'applique aussi lorsque les résistances sont des impédances:
Z = R +/- j X

$$j^2 = i^2 = -1$$



FILTRE PASSE BAS

Réactance XC d'un condensateur

$$XC = \frac{1}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot C} = \frac{-j}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C}$$

XC est négatif

$$\frac{e}{E} = K = \frac{XC}{XC + R} = \frac{\frac{1}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot C}}{R + \frac{1}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot C}}$$

$$K = \frac{i}{i - 2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f}$$

Fonction de transfert

Fréquence pour: $|Xc| = R$

$$\frac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C} = R$$

$$fc = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot R\cdot C}$$

Fréquence de coupure -3 dB

Valeur de la fonction de transfert à la fréquence de coupure fc:

$$K(f) = \frac{i}{i - 2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot\frac{1}{(2\cdot\pi\cdot R\cdot C)}} \qquad K(f) = \frac{i}{i-1} \qquad K(f) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i$$

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i\right| = 0.707$$ Module

$$\frac{180}{\pi}\cdot\arg\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i\right) = -45$$ Degrés

$$20\cdot\log\left(\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i\right|\right) = -3.01$$ dB à la fréquence de coupure

$R := 1 \qquad C := 1 \qquad Fc := \frac{1}{2\cdot\pi\cdot R\cdot C} = 0.159$ Fréquence de coupure -3 dB

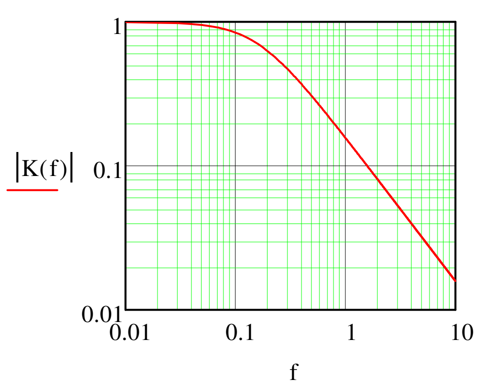
$$K(f) := \frac{i}{i - 2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f} \qquad Angle(f) := \frac{180}{\pi}\cdot\arg(K(f))$$

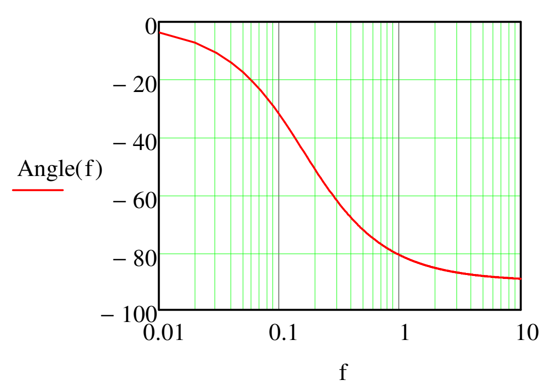
$Angle(Fc) = -45$

-45 degrés à la freq. de coupure

$f := 0.01, 0.02 .. 10$

Réponse en fréquence et angle





PENTES de K(f)

Pour 1 octave:

$F1 := 20 \qquad F2 := 2\cdot F1 \qquad 20\cdot\log(|K(F2)|) - 20\cdot\log(|K(F1)|) = -6.02$ dB / octave

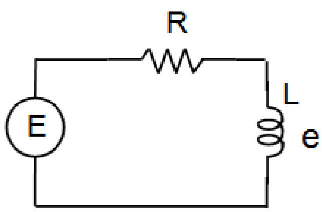
Pour 1 décade:

$F2 := 10\cdot F1 \qquad 20\cdot\log(|K(F2)|) - 20\cdot\log(|K(F1)|) = -20$ dB / décade

Fonction de transfert en fonction de la fréquence de coupure: fc du filtre passe-bas

$K = \dfrac{i}{i - 2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f}$ $\qquad fc = \dfrac{1}{2\cdot\pi\cdot R\cdot C}$ $\qquad 2\cdot\pi\cdot R\cdot C = \dfrac{1}{fc}$

$K = \dfrac{i}{i - \dfrac{f}{fc}}$ $\qquad |K| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{f^2}{fc^2}}}$



FILTRE PASSE HAUT

Réactance XL de l'inductance L:

$XL = i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L$ $\qquad$ **XL est positif**

$\dfrac{e}{E} = K = \dfrac{i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L}{i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L + R}$ $\qquad K = \dfrac{i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L}{i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L + R}$

Fréquence pour: $|XL| = R$ $\qquad 2\cdot\pi\cdot f\cdot L = R$ $\qquad fc = \dfrac{R}{2\cdot\pi\cdot L}$ Fréquence de coupure

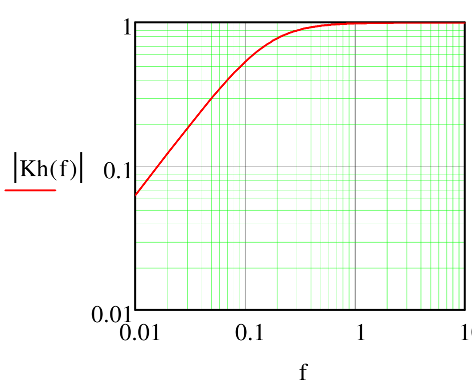
Avec f = fc: $K = \dfrac{i\cdot 2\cdot\pi\cdot\dfrac{R}{2\cdot\pi\cdot L}\cdot L}{i\cdot 2\cdot\pi\cdot\dfrac{R}{2\cdot\pi\cdot L}\cdot L + R}$ $\qquad K = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot i$ Après simplification

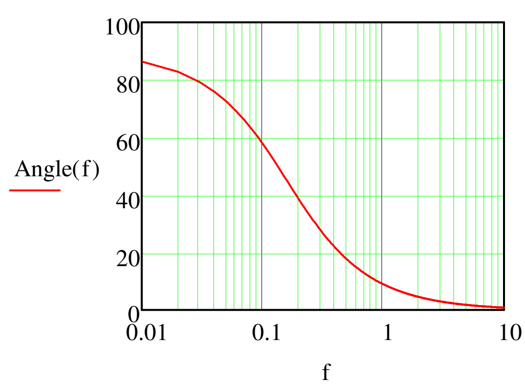
$K = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot i$ $\qquad \left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot i\right| = 0.707$ Module $\qquad \dfrac{180}{\pi}\cdot\arg\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot i\right) = 45$

+45 degrés à la freq. de coupure

$L := 1 \qquad R := 1$

$Kh(f) := \dfrac{i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L}{i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L + R}$ $\qquad Angle(f) := \dfrac{180}{\pi}\cdot\arg(Kh(f))$





PENTES de Kh(f)

Pour 1 octave:

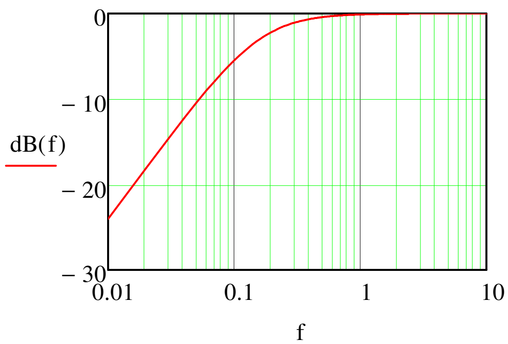
$F1 := 0.0001 \quad F2 := 2 \cdot F1 \qquad 20 \cdot \log(|Kh(F2)|) - 20 \cdot \log(|Kh(F1)|) = 6.021$ dB / octave

Pour 1 décade:

$F2 := 10 \cdot F1 \qquad 20 \cdot \log(|Kh(F2)|) - 20 \cdot \log(|Kh(F1)|) = 20$ dB / décade

RÉPONSE en dB

$$dB(f) := 20 \cdot \log(|Kh(f)|)$$



Fonction de transfert en fonction de la fréquence de coupure: fc

$$K = \frac{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L}{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L + R} \qquad fc = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot L}$$

Alors: $2 \cdot \pi \cdot L = \frac{R}{fc}$

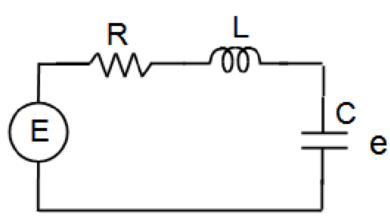
On substitue 2*π*L pour R / fc

$$K = \frac{i \cdot f \cdot \frac{R}{fc}}{i \cdot f \cdot \frac{R}{fc} + R} \qquad K = \frac{\frac{i \cdot f}{fc}}{\frac{i \cdot f}{fc} + 1}$$

Après simplification

$$|K| = \frac{\frac{f}{fc}}{\sqrt{\frac{f^2}{fc^2} + 1}}$$

FILTRE PASSE-BAS / PASSE-BANDE



Simplifications

$$\frac{e}{E} = K = \frac{\frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}}{\frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L + R} \qquad -\frac{i}{2 \cdot \pi \cdot C \cdot R \cdot f - i + 4 \cdot \pi^2 \cdot C \cdot L \cdot f^2 \cdot i}$$

Simplifications

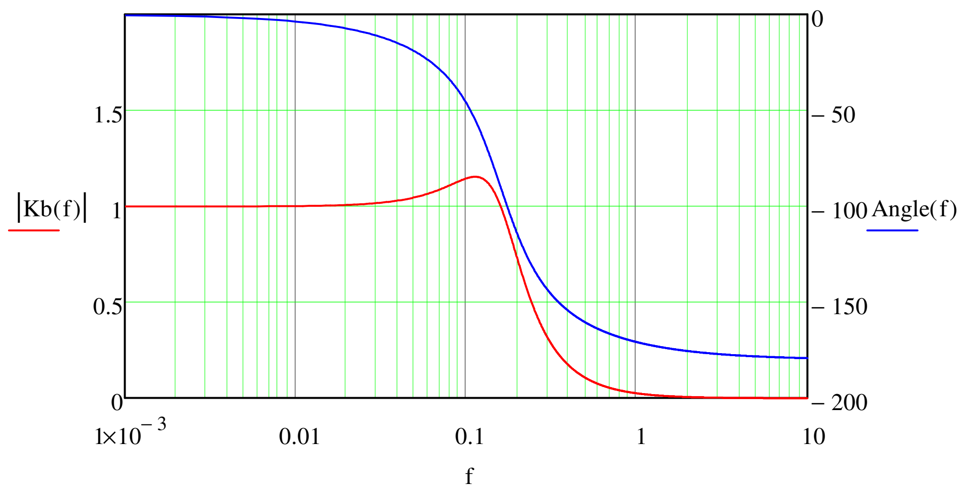
$$\frac{i}{-2 \cdot \pi \cdot C \cdot R \cdot f + i - 4 \cdot \pi^2 \cdot C \cdot L \cdot f^2 \cdot i} \qquad \frac{i}{-2 \cdot \pi \cdot C \cdot R \cdot f + i \cdot \left(1 - 4 \cdot \pi^2 \cdot C \cdot L \cdot f^2\right)}$$

$f := 0.001, 0.002..10$ $\qquad R := 1$ $\qquad C = 1$ $\qquad L = 1$

$$Kb(f) := \frac{i}{-2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f + i\cdot\left(1 - 4\cdot\pi^2\cdot C\cdot L\cdot f^2\right)}$$

$$Angle(f) := \frac{180}{\pi}\cdot \arg(Kb(f))$$

Varie entre 0 et -180 degrés.



$$0 = 1 - 4\cdot\pi^2\cdot C\cdot L\cdot f^2$$

On cherche la fréquence qui va annuler la partie imaginaire du dénominateur. On résout pour f

$$f = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{C\cdot L}}{2\cdot\pi\cdot C\cdot L} \\ -\dfrac{\sqrt{C\cdot L}}{2\cdot\pi\cdot C\cdot L} \end{pmatrix}$$

On trouve la fréquence de résonnance:

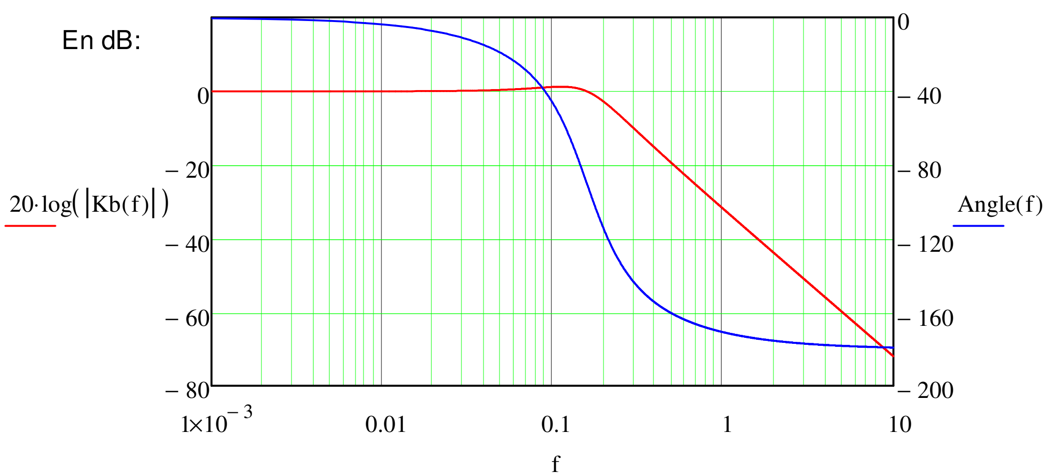
$$fr = \frac{\sqrt{C\cdot L}}{2\cdot\pi\cdot C\cdot L}\cdot\frac{\sqrt{L\cdot C}}{\sqrt{L\cdot C}} = \frac{L\cdot C}{2\cdot\pi\cdot C\cdot L\cdot\sqrt{L\cdot C}} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}$$

$$fr := \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}} = 0.159$$

Fréquence de résonnance

On peut aussi calculer fr sachant que XC = XL à la résonnance

En dB:



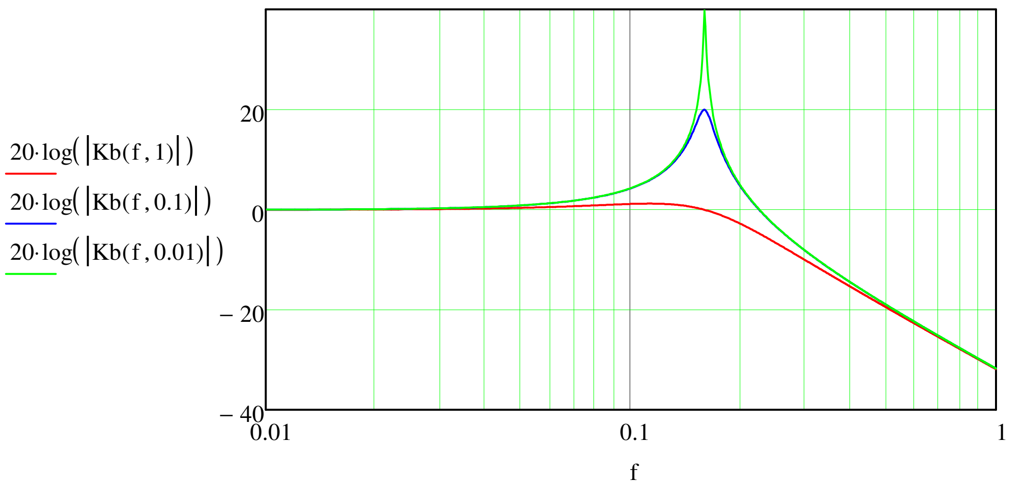
$$Kb(f,R) := \frac{i}{-2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f + i\cdot\left(1 - 4\cdot\pi^2\cdot C\cdot L\cdot f^2\right)}$$

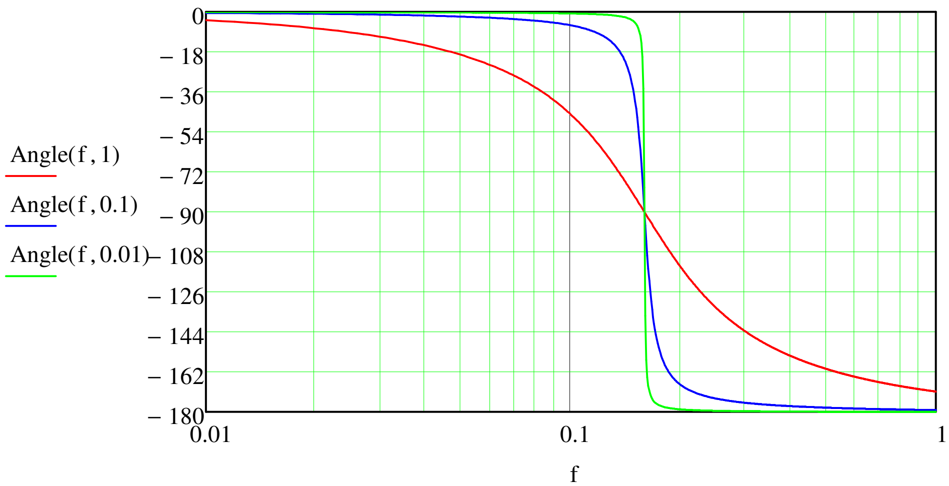
$$Angle(f,R) := \frac{180}{\pi}\cdot \arg(Kb(f,R))$$

R contrôle l'amortissement

$f := 0.01, 0.011 .. 1$

R contrôle l'amortissement





Amplitude Kb = Kbmax à la fréquence de résonnance: fr
Alors le dénominateur de Kb est réel

$$fr = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}$$

$$Kbmax = \frac{i}{-2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f}$$

On substitue fr dans Kbmax:

$$Kbmax = \frac{i}{-2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}}$$

$$Kbmax := -\frac{\sqrt{C\cdot L}\cdot i}{C\cdot R}$$

Après simplification

$R = 1$ $\qquad L = 1$ $\qquad C = 1$

$$Kbmax1 := \left|-\frac{\sqrt{C\cdot L}\cdot i}{C\cdot R}\right| \qquad Kbmax1 = 1$$

Amplitude et angle de la fonction de transfert à la résonnance.

$$Angle := \frac{180}{\pi}\cdot\arg(Kbmax) = -90$$

Degrés

À la fréquence de résonnance on a -90 degrés de déphasage entre la sortie et l'entrée.

Facteur de qualité: Q = réactance / résistance

Résistance = pertes ---> chaleur

$$Q = \frac{|Xc|}{R} \qquad Q = \frac{\frac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C}}{R} \qquad Q = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f} \qquad fr = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}$$

À la fréquence de résonnance fr:

$$Q = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C\cdot R} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}\cdot C\cdot R} = \frac{\sqrt{C\cdot L}}{C\cdot R}$$

On trouve: $Q = \frac{\sqrt{C\cdot L}}{C\cdot R}$ Corresponds à l'amplitude de Kbmax $Q := \frac{\sqrt{C\cdot L}}{C\cdot R} = 1$

Q est inversement proportionnel à R

Fonction de transfert en fonction de la fréquence de résonnance: fr et facteur de qualité Q

$$Kbb(f) = \frac{i}{-2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f + i\cdot\left(1 - 4\cdot\pi^2\cdot C\cdot L\cdot f^2\right)}$$

Tel que démontré précédemment

$$Kbb(f) = \frac{i}{-2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f + i\cdot\left(1 - \frac{f^2}{fr^2}\right)}$$

Puisque : $fr^2 = \left(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}\right)^2$

$$Q = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot fr\cdot C\cdot R} \qquad 2\cdot\pi\cdot C\cdot R = \frac{1}{Q\cdot fr}$$

$$Kbbb(f) = \frac{i}{\frac{-f}{fr\cdot Q} + i\cdot\left(1 - \frac{f^2}{fr^2}\right)}$$

Fonction de transfert utilisant fr et Q

$$Kbb(f) = \frac{1}{\sqrt{\frac{f^2}{fr^2\cdot Q^2} + \left(1 - \frac{f^2}{fr^2}\right)^2}}$$

Amplitude

À la résonnance f=fr

$$Kbb(fr) = \frac{1}{\frac{1}{Q}} = Q$$

La tension 'e' est proportionnelle au facteur de qualité Q à la résonnance

Mesure du facteur Q

PENTES de Kh(f) en haut de la résonnance

Pour 1 octave:

$F1 := 10 \quad F2 := 2\cdot F1 \quad 20\cdot\log(|Kb(F2,R)|) - 20\cdot\log(|Kb(F1,R)|) = -12.042$ dB/octave

Pour 1 décade:

$F2 := 10\cdot F1 \quad 20\cdot\log(|Kb(F2,R)|) - 20\cdot\log(|Kb(F1,R)|) = -40$ dB/décade

FILTRE À BANDE PASSANTE SYMÉTRIQUE

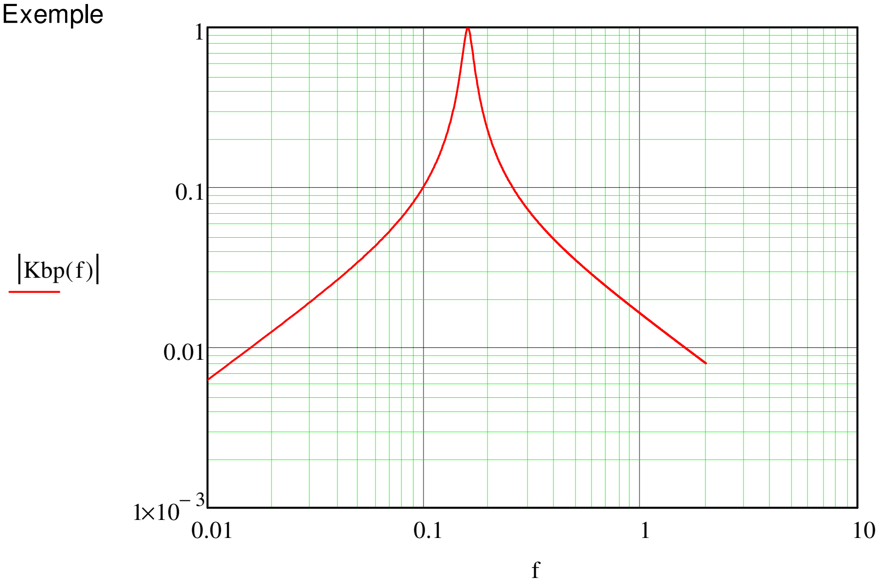
$fo := \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}$ $\quad Q := 10 \quad f := 0.01, 0.011 .. 2$

$$Kbp(f) := \frac{1}{1 + i\cdot Q\cdot\left(\frac{f}{fr} - \frac{fr}{f}\right)}$$

$$Kbp1(f) := \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\cdot\left(\frac{f}{fr} - \frac{fr}{f}\right)^2}}$$

Amplitude en fonction de la fréq. de résonnance
L'amplitude maximum est toujours égale à 1

Exemple



PENTES de Kbp(f) En haut de la résonnance

Pour 1 octave:

$F1 := 10 \quad F2 := 2\cdot F1 \quad 20\cdot\log(|Kbp(F2)|) - 20\cdot\log(|Kbp(F1)|) = -6.022$ dB/octave

Pour 1 décade:

$F2 := 10\cdot F1 \quad 20\cdot\log(|Kbp(F2)|) - 20\cdot\log(|Kbp(F1)|) = -20$ dB/décade

PENTES de Kbp(f) En bas de la résonnance

Pour 1 octave:

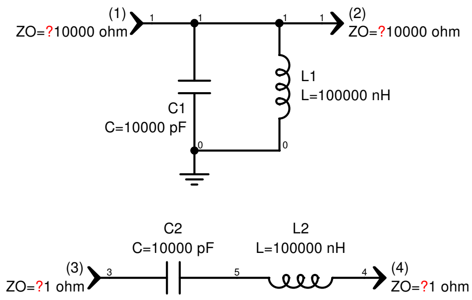
$F1 := 0.001 \quad F2 := 2\cdot F1 \quad 20\cdot\log(|Kbp(F2)|) - 20\cdot\log(|Kbp(F1)|) = 6.022$ dB/octave

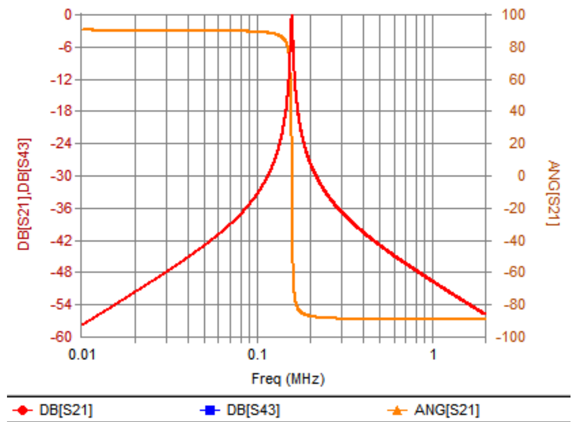
Pour 1 décade:

$F2 := 10\cdot F1 \quad 20\cdot\log(|Kbp(F2)|) - 20\cdot\log(|Kbp(F1)|) = 20.03$ dB/décade

Exemple de circuits qui donnent une bande passante symétrique. Simulations.

Deux circuits qui donnent la <u>même courbe d'atténuation vs fréquence</u>. Phase en orange





Calcul du circuit série L2, C2:

$C2 := 10000 \cdot 10^{-12}$ $\quad L2 := 100000 \cdot 10^{-9}$ $\quad Zo := 1$ $\quad R := 2 \cdot Zo = 2$

Calcul de fr et Q:

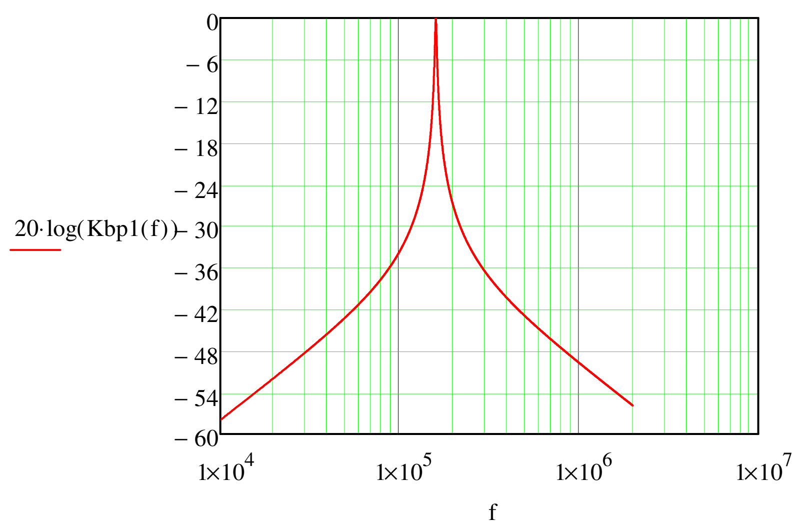
$fr := \dfrac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L2 \cdot C2}} = 159155$ Hz $\qquad Q := \dfrac{1}{2 \cdot \pi \cdot fr \cdot C2 \cdot R} = 50$

NOTER : À la frequence de résonnance fr: $XC = XL$ Et l'impédance = R

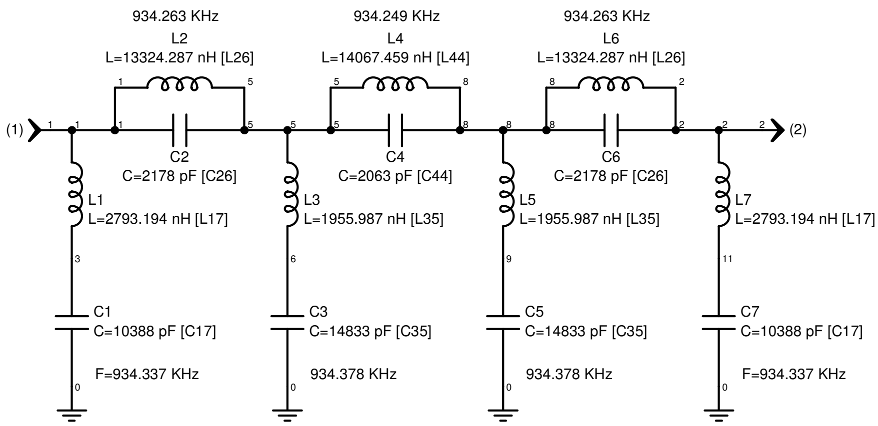
Calcul de la réponse en fréquence:

$$Kbp1(f) := \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(\frac{f}{fr} - \frac{fr}{f}\right)^2}}$$

$f := 10000, 10100 .. 2 \cdot 10^6$



FILTRE ÉLIMINATEUR DE BANDE (AM) de ma conception



Réponse mesurée